Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений по математике в 2014/2015 году

Вариант 1

1. Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 52 включительно и записал в тетрадь ответ:

80658175170943878571660636856403766975289505440883277x4000000000000.

Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру. Ответ обоснуйте.

Решение: В разложении числа 52! на простые множители,

$$52! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \ldots, \qquad (1)$$

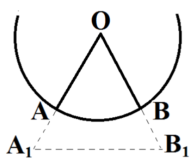
степень пятерки $c = 12$. Действительно, множитель 5 дают числа 5,10,15,20, 25..., причем разложения чисел 25 и 50 содержат 5 во второй степени. Степень же двойки a, очевидно, существенно больше 12. Рассмотрим произведение простых сомножителей в правой части (1). Каждый ноль на конце десятичной записи числа 52! – результат перемножения одной 2 и одной 5. Именно поэтому нулей на конце тоже 12. Двоек у нас существенно больше, чем пятерок, поэтому, если в записи числа 52! отбросить все нули на конце, то получившееся в результате число

$$80658175170943878571660636856403766975289505440883277x4 \qquad (2)$$

будет делиться на 2 в достаточно высокой степени. В частности, число (2) делится на 2^4=16, а это значит, что на 16 делится число, образованное его четырьмя последними цифрами. Прямым перебором находим, что число 78x4 делится на 16 только при x=2.

Ответ: 2.

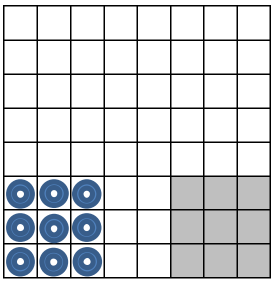
2. Дан круговой сектор AOB. Угол AOB равен 60^0. Длины радиусов OA и OB увеличили на 5%, в результате они превратились в отрезки OA_1 и OB_1. Что больше: длина отрезка A_1B_1 или длина дуги AB? Ответ обоснуйте. (Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.)



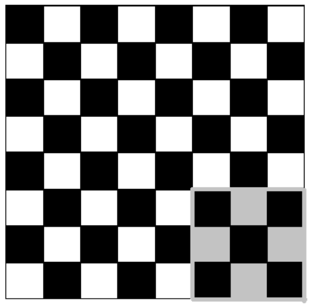
Решение: Длина дуги AB в шесть раз меньше длины окружности и равна $\pi R/3$. Длина основания A_1B_1 равна $2OA_1 \sin\frac{\angle AOB}{2} = 2R \cdot 1,05 \sin 30^0 = 1,05R$. Остается заметить, что $\pi/3 < 1,05$.

Ответ: длина отрезка больше длины дуги.

3. На доске 8x8 клеток расположены 9 шашек. Перемещения шашек (ходы) осуществляются следующим образом: выбирается первая (перемещаемая) и вторая шашки. Затем первую ставят на такую клетку, что исходное и полученное положения симметричны относительно второй шашки. Можно ли такими ходами переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол? Ответ обоснуйте.



Решение: Раскрасим клетки в белый и черный цвет. В результате хода перемещаемая шашка из белой клетки попадает вновь в белую, а из черной в черную. Значит, количество белых клеток, занимаемых шашками, всегда одно и то же. Остается заметить, что в правом нижнем углу шашки бы занимали 4 белые клетки, а в исходном положении они занимают 5 белых клеток. Поэтому переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол невозможно.



Ответ: нельзя.

4. Докажите, что для каждого натурального числа n выполняется равенство $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right]$. Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, [3,7]=3.)

Решение: Целые части чисел a и b равны в том и только том случае, когда полуинтервал $(a,b]$ не содержит целые числа. Предположим противное: пусть при некотором натуральном n имеет место неравенство $\left[\sqrt{4n+1}\right]\neq\left[\sqrt{4n+3}\right]$. Тогда

$\exists m\in N:\sqrt{4n+1}<m\leq\sqrt{4n+3}\Leftrightarrow 4n+1<m^2\leq 4n+3.$ Следовательно, m^2 равен либо $4n+2$, либо $4n+3$. Но квадрат целого числа при делении на 4 не может дать остаток 2 или 3. Полученное противоречие доказывает требуемое равенство.

5. Уравнения $x^4+2x^3-x^2-2x-3=0$ и $x^4+3x^3+x^2-4x-6=0$ имеют два общих корня. Найдите их.

Решение: Поделим многочлен $P(x)=x^4+2x^3-x^2-2x-3$ на многочлен $Q(x)=x^4+3x^3+x^2-4x-6$ с остатком: $P(x)=F(x)Q(x)+R(x)$. Общие корни многочленов $P(x),Q(x)$ являются, очевидно, и корнями остатка $R(x)=-x^3-2x^2+2x+3$. Поделив теперь $Q(x)$ на $R(x)$, получим в остатке x^2+x-3. Корни последнего многочлена и будут искомыми.

Ответ: $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

6. Сколько существует пар натуральных чисел (a,b), $1\leq a\leq 10, 1\leq b\leq 10, a>b$, для которых число $a^{2015}+b^{2015}$ делится нацело на число $a-b$?

Решение: Обозначим $c=a-b$. Сразу отметим, что

$$a=b+c\leq 10. \qquad (1)$$

Далее, $a^{2015}+b^{2015}=\left(b+c\right)^{2015}+b^{2015}=\ldots+2b^{2015}$. Здесь троеточием обозначены слагаемые, заведомо делящиеся на c. Таким образом, число $a^{2015}+b^{2015}$ делится на число c в том и только том случае, когда на c делится произведение $2b^{2015}$. Последнее возможно, например, когда $c=1$ или $c=2$. Для $c=1$ получаем **9** пар : (2,1), (3,2),..., (10,9), а в случае $c=2$ – **8** пар: (3,1), (4,2),..., (10,8).

Пусть теперь $c>2$. Изучим делимость $2b^{2015}$ на c при всех значениях $b\in[1;9]$:

1) $b=1$, тогда $c=2$. Этот случай уже рассмотрен;

2) $b=2$, тогда $c\in\{4,8\}$. Находим **2** пары (a,b): (6,2), (10,2);

3) $b=3,$ тогда $c\in\{3,6,9\}$. **2** пары: (6,3), (9,3). Случай $c=9$ не удовлетворяет (1);

4) $b=4,$ тогда $c\in\{4,8\}$. **1** пара: (8,4). Случай $c=8$ не удовлетворяет (1);

5) $b=5,$ тогда $c\in\{5,10\}$. **1** пара: (10,5). Случай $c=10$ не удовлетворяет (1);

6) $b=6,$ тогда $c\in\{3,4,6,9\}$. **2** пары: (9,6), (10,6). Случаи $c=6$ и $c=9$ не удовлетворяют (1);

7) $b=7,$ тогда $c=7.$ Этот случай не удовлетворяет (1);

8) $b=8,$ тогда $c\in\{4,8\}$. Этот случай не удовлетворяет (1).

Случай $b=9$ также ничего не дает в силу (1).

Ответ: 25 пар.

7. Числа a,b удовлетворяют равенствам $a^3-3a^2+5a=1$ и $b^3-3b^2+5b=5$. Найдите $a+b$.

Решение: Перепишем левые части равенств следующим образом:

$$a^3-3a^2+5a=(a-1)^3+2a+1=(a-1)^3+2(a-1)+3,$$
$$b^3-3b^2+5b=(b-1)^3+2b+1=(b-1)^3+2(b-1)+3.$$

Выполнив замену $A=a-1, B=b-1,$ представим данные в условии равенства в виде:

$$A^3+2A+2=0, \qquad B^3+2B-2=0.$$

Сложив их, получим $(A+B)(A^2-AB+B^2+2)=0 \Leftrightarrow A+B=0.$ Отсюда $a+b=2.$

Ответ: 2.

8. Имеется *n* целых чисел $0,1,2,\ldots,n-1$. Переставив эти числа в случайном порядке, получим их некоторую *перестановку* $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$. Из исходного набора чисел $(0,1,2,\ldots,n-1)$ и этой перестановки $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ получим новый набор чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ по правилу: $a_1=r_n(0+i_1), a_2=r_n(1+i_2),\ldots,a_n=r_n((n-1)+i_n)$, где $r_n(m)$ – остаток от деления числа m на число *n*. (Например, пусть $n=3$. Тогда, из исходного набора (0,1,2) и перестановки $(i_1,i_2,i_3)=$ (1,2,0) получится набор $(a_1,a_2,a_3)=$ (1,0,2), т.к. $r_3(0+1)=1, r_3(1+2)=0, r_3(2+0)=2.$)

а) При $n=5$ приведите пример такой перестановки $(i_1,i_2,\ldots,i_5)$, что в соответствующем наборе $(a_1,a_2,\ldots,a_5)$ все числа различны;

б) докажите, что, если $n=6,$ то какую бы перестановку $(i_1,i_2,\ldots,i_6)$ мы ни взяли, в наборе $(a_1,a_2,\ldots,a_6)$ обязательно встретятся одинаковые числа.

Решение: а) Например, $(i_1,i_2,\ldots,i_5)=(3,4,0,1,2)$;

б) По условию $(0+1+\ldots+5)+(i_1+\ldots+i_6)=a_1+\ldots+a_6 \pmod 6$. Если бы все a_i были различны, то сумма чисел в правой части была бы равна 15. Но равенство $15+15=15 \pmod 6$ не справедливо. Поэтому среди чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_6)$ есть одинаковые.