Вариант 1.1

1. Упростите выражение:

$$\left(6a+5\sqrt{a}-1+\frac{6-\sqrt{a^{-1}}}{1-2\sqrt{a^{-1}}}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-2+\frac{3-5\sqrt{a^{-1}}}{1-2\sqrt{a^{-1}}}\right)^{-1}+1.$$

Решение:

Преобразуем выражение (возможно также сделать замену $t=\sqrt{a}$):

$$\left(6a+5\sqrt{a}-1+\frac{6\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-2}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-2+\frac{3\sqrt{a}-5}{\sqrt{a}-2}\right)^{-1}+1=$$

$$=\frac{6a\sqrt{a}-7a+5\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2}\cdot\frac{\sqrt{a}-2}{a-\sqrt{a}-1}+1=\frac{6a\sqrt{a}-6a-6\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}-1}=$$

$$=6\sqrt{a}.$$

Ответ: $6\sqrt{a}$.

2. Решите уравнение:

$$4\cos^2\frac{2}{x}-\sin\frac{4}{x}-1=0.$$

Решение:

$$4\cos^2\frac{2}{x}-\sin\frac{4}{x}-1=0\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{2}{x}-2\sin\frac{2}{x}\cos\frac{2}{x}-\sin^2\frac{2}{x}-\cos^2\frac{2}{x}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2\frac{2}{x}-2\sin\frac{2}{x}\cos\frac{2}{x}-\sin^2\frac{2}{x}=0.$$

Это однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Убедившись, что $\cos\frac{2}{x}\neq 0$, разделим обе части уравнения на $\cos^2\frac{2}{x}$ и далее сделаем замену $t=\operatorname{tg}\frac{2}{x}$. Получим

$$t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1,\\t=-3.\end{array}\right.$$

Отсюда придем к совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{2}{x}=1,\\ \operatorname{tg}\frac{2}{x}=-3.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{2}{x}=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ \frac{2}{x}=-\operatorname{arctg}3+\pi k, k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{8}{\pi+4\pi n}, n\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{2}{-\operatorname{arctg}3+\pi k}, k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{8}{\pi+4\pi n}, \frac{2}{-\operatorname{arctg}3+\pi k}, n,k\in\mathbb{Z}$.

3. Решите неравенство:

$$\log_{0,1x}10\cdot(\lg^2 x-\lg x-4)>1.$$

Решение:

Преобразуем неравенство, перейдя к основанию 10

$$\frac{\lg^2 x-\lg x-4}{\lg x-1}>1\Leftrightarrow\frac{\lg^2 x-2\lg x-3}{\lg x-1}>0\Leftrightarrow\frac{(\lg x+1)(\lg x-3)}{\lg x-1}>0$$

Применив рационализацию, придем к рациональному неравенству, решаемому методом интервалов:

$$\frac{(x-0{,}1)(x-1000)}{x-10}>0 \Leftrightarrow x\in(0{,}1;10)\cup(1000;+\infty).$$

Замечание: возможна замена переменной $t=\lg x$, тогда решая неравенство относительно t, получим $t\in(-1;1)\cup(3;+\infty)$. После обратной замены придем к уже полученному ответу.

Ответ: $(0{,}1;10)\cup(1000;+\infty)$.

4. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12, а сумма квадратов всех ее членов равна 72. Найдите пятый член прогрессии.

Решение:

Согласно условию, имеем систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{b_1}{1-q}=12,\\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2}=72,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{b_1}{1-q}=12,\\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2}:\dfrac{b_1}{1-q}=72:12,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{b_1}{1-q}=12,\\ \dfrac{b_1}{1+q}=6,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{b_1}{1-q}:\dfrac{b_1}{1+q}=12:6,\\ \dfrac{b_1}{1+q}=6,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1+q}{1-q}=2,\\ \dfrac{b_1}{1+q}=6,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+q=2(1-q),\\ \dfrac{b_1}{1+q}=6,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}q=\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{b_1}{1+q}=6,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}q=\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{3}{4}b_1=6,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}q=\dfrac{1}{3},\\ b_1=8.\end{cases}$$

Тогда $b_5=b_1q^4=\frac{8}{81}$.

Ответ: $b_5=\frac{8}{81}$.

5. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 20 км, выехал велосипедист, а через 15 мин вслед за ним со скоростью 15 км/ч отправился другой велосипедист, который догнав первого, повернул назад и возвратился в A за 45 мин до прибытия первого велосипедиста в B. Найдите скорость первого велосипедиста.

Решение:

Пусть скорость первого велосипедиста равна x км/ч. За 1 мин, первый велосипедист проедет $\frac{x}{4}$ км, тогда второй велосипедист догонит первого через $\frac{\frac{x}{4}}{15-x}=\frac{x}{4(15-x)}$ ч на расстоянии $\frac{15x}{4(15-x)}$ км от пункта А, а значит $20-\frac{15x}{4(15-x)}$ км от пункта В. Но тогда дорога от их места встречи до пункта В у первого велосипедиста займет

$$\frac{20-\frac{15x}{4(15-x)}}{x}=\frac{1200-95x}{4x(15-x)},$$

в то время как у второго до пункта A займет $\frac{x}{4(15-x)}$ ч. Отсюда имеем уравнение:

$$\frac{1200-95x}{4x(15-x)}-\frac{3}{4}=\frac{x}{4(15-x)} \Leftrightarrow \frac{x^2-70x+600}{2x(15-x)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=60 \end{array}\right.$$

По смыслу условия задачи, скорость первого велосипедиста не может быть больше 15 км/ч, а значит $x=10$ км/ч.

Ответ: 10 км/ч.

6. Решите неравенство:

$$3^x\left(\sqrt{9^{1-x}-1}+1\right)<3|3^x-1|.$$

Решение:

Разделим обе части неравенства на $3^x>0$:

$$3^x\left(\sqrt{9^{1-x}-1}+1\right)<3|3^x-1| \Leftrightarrow \sqrt{9\cdot 3^{-2x}-1}+1<3|1-3^{-x}|.$$

Сделаем замену переменной $t=3^{-x},\ t>0$.

$$\sqrt{9t^2-1}+1<3|t-1|.$$

Раскроем модуль по определению

1) Пусть $0<t\leq 1$. Имеем неравенство

$$\sqrt{9t^2-1}+1<3(1-t) \Leftrightarrow \sqrt{9t^2-1}<2-3t \Leftrightarrow \begin{cases} 9t^2-1<(2-3t)^2, \\ 2-3t\geq 0, \\ 9t^2-1\geq 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9t^2-1<4-12t+9t^2, \\ t\leq\frac{3}{2}, \\ |t|\geq\frac{1}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t<\frac{5}{12}, \\ t\leq\frac{3}{2}, \\ |t|\geq\frac{1}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\leq t<\frac{5}{12}.$$

Сделав обратную замену, получим неравенство

$$\frac{1}{3}\leq 3^{-x}<\frac{5}{12} \Leftrightarrow -1\leq -x<\log_3\frac{5}{12} \Leftrightarrow \log_3\frac{12}{5}<x\leq 1 \Leftrightarrow x\in\left(\log_3\frac{12}{5};1\right].$$

2) Пусть $t>1$. Имеем неравенство

$$\sqrt{9t^2-1}+1<3(t-1) \Leftrightarrow \sqrt{9t^2-1}<3t-4 \Leftrightarrow \begin{cases} 9t^2-1<(3t-4)^2, \\ 3t-4\geq 0, \\ 9t^2-1\geq 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9t^2 - 1 < 16 - 24t + 9t^2, \\ t \geq \dfrac{4}{3}, \\ |t| \geq \dfrac{1}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < \dfrac{17}{24}, \\ t \leq \dfrac{4}{3}, \\ |t| \geq \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

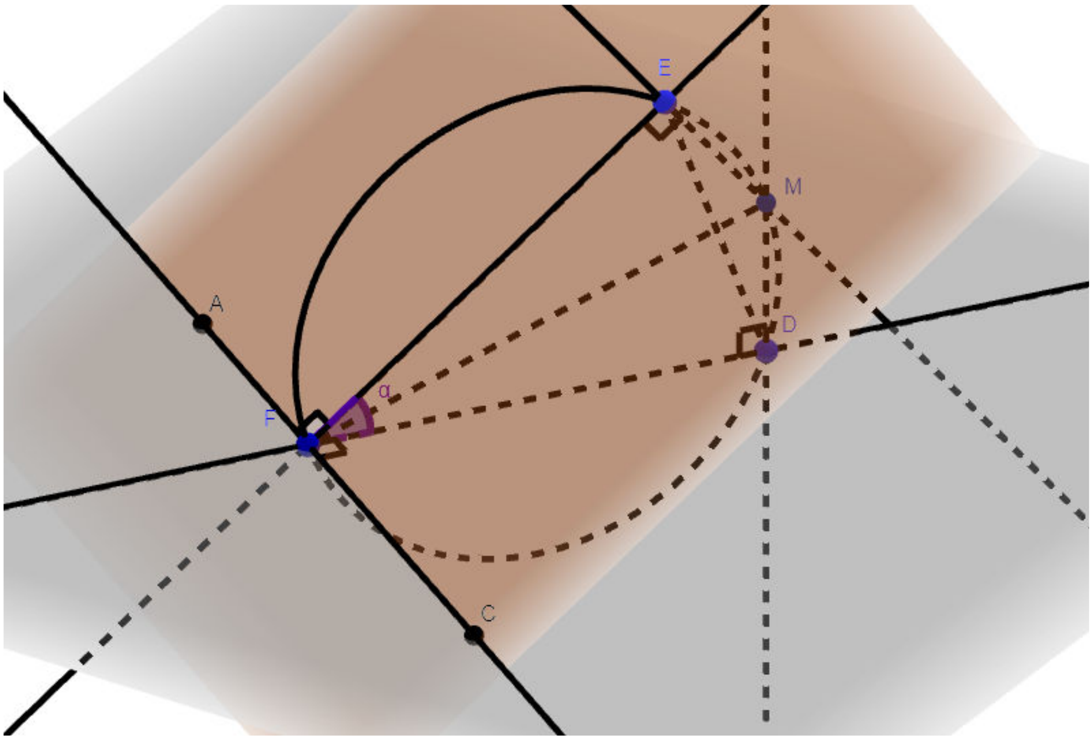
Несложно понять, что полученная система не имеет решений.

В совокупности с 1-м случаем окончательно имеем ответ $x \in \left(\log_3 \frac{12}{5}; 1\right]$.

Ответ: $\left(\log_3 \frac{12}{5}; 1\right]$.

7. Точка M лежит внутри двугранного угла величиной $60°$ и удалена от его граней на расстояния 3 и 5. Найдите расстояние от точки M до ребра двугранного угла.

Решение:



Опустим перпендикуляры ME и MD из точки M на грани двугранного угла. Тогда $ME = 3, MD = 5$. Плоскость (EMD) пересекает грани двугранного угла по прямым DF и EF соответственно. В то же время ребро AC двугранного угла перпендикулярно прямым ME и MD одновременно, поэтому по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AC \perp (EMD)$, при этом $DF \subset (EMD)$, $EF \subset (EMD)$, а значит, $AC \perp DF, AC \perp EF$. Следовательно, $\angle EFD$ – линейный угол двугранного угла, т.е. $\angle EFD = \alpha = 60°$. В частности, $MF \subset (EMD)$, откуда следует, что $MF \perp AC$. Итак, отрезок MF – искомое расстояние от точки M до ребра двугранного угла.

Рассмотрим четырехугольник $MEFD$. Ясно, что $MEFD$ – вписанный, т.к. $\angle FEM + \angle MDF = 180°$. При этом $MF = 2R$ – диаметр описанной окружности.

Вместе с тем $\angle EMD = 180^\circ - \alpha = 120^\circ$. По теореме косинусов в треугольнике EMD найдем ED:

$$ED = \sqrt{ME^2 + MD^2 - 2 \cdot ME \cdot MD \cdot \cos \angle EMD} = \sqrt{9 + 25 + 15} = \sqrt{49} = 7.$$

Заметим, что $MF = 2R$ есть также диаметр окружности, описанной около треугольника EMD. Найдем его по обобщенной теореме синусов

$$MF = 2R = \frac{ED}{\sin \angle EMD} = \frac{7}{\sqrt{3}/2} = \frac{14}{\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{14\sqrt{3}}{3}$.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 10|x - 3| + 4^{x^2 - 6x + 11} = 4a + 3|3x - 4a - 9|$$

имеет хотя бы один корень?

Решение:

Преобразуем уравнение

$$a^2 + 10|x - 3| + 4^{(x-3)^2 + 2} = 4a + 3|3(x - 3) - 4a|.$$

Сделав замену $t = x - 3$, придем к уравнению

$$a^2 + 10|t| - 3|3t - 4a| + 4^{t^2 + 2} - 4a = 0.$$

Заметим, что данное уравнение относительно t имеет столько же решений сколько имеет исходное относительно x. Поэтому далее достаточно рассматривать только полученное уравнение и определить значения параметра a, при которых оно имеет хотя бы один корень.

Введем функцию

$$f(t) = 10|t| - 3|3t - 4a| + 4^{t^2 + 2} - 4a + a^2.$$

Понятно, что она является суммой кусочно-линейной функции $g(t) = 10|t| - -3|3t - 4a| - 4a + a^2$ и функции $h(t) = 4^{t^2+2}$. При $t \geq 0$ функция $g(t)$ имеет вид $10t - 3|3t - 4a| - 4a + a^2$, а при $t \leq 0$ – вид $-10t - 3|3t - 4a| - 4a + a^2$. Нетрудно понять, что независимо от раскрытия модуля $|3t - 4a|$ угловой коэффициент прямых, получаемых в результате такого раскрытия при $t \geq 0$ будет положителен, а при $t \leq 0$ – отрицателен. А поэтому функция $g(t)$ является убывающей на луче $(-\infty, 0]$ и возрастающей на луче $[0, +\infty)$. Функция $h(t) = 4^{t^2+2}$ также является убывающей на луче $(-\infty, 0]$ и возрастающей на луче $[0, +\infty)$ в силу свойств композиции монотонных функций. Поэтому функция $f(t)$ является убывающей на луче $(-\infty, 0]$ и возрастающей на луче $[0, +\infty)$ в силу свойств суммы монотонных функций. Значит, $t = 0$ есть точка глобального минимума функции $f(t)$. Поэтому уравнение $f(t) = 0$ имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда $f(0) \leq 0$.

Решим неравенство

$$f(0) = -12|a| + 16 - 4a + a^2 \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a \geq 0 \\ a^2 - 16a + 16 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ a^2 + 8a + 16 \leq 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a \geq 0 \\ a^2 - 16a + 16 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ (a+4)^2 \leq 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8 - 4\sqrt{3} \leq a \leq 8 + 4\sqrt{3} \\ a = -4 \end{array}\right.$$

Окончательно имеем $a \in \{-4\} \cup \left[8 - 4\sqrt{3}; 8 + 4\sqrt{3}\right]$.

Ответ: $a \in \{-4\} \cup \left[8 - 4\sqrt{3}; 8 + 4\sqrt{3}\right]$.