Вариант 1

1. Лыжник спускается с вершины горы к её подножию за 10 минут, а сноубордист – за 5 минут. Спустившись, они тут же поднимаются вверх на подъёмнике, а затем сразу же спускаются вновь. В 12:00 они одновременно начали спуск с вершины. Впервые они встретились у подножия в 14:10. Определите время подъёма от подножия до вершины.

Решение:

Обозначим время подъема от подножия до вершины горы через x. Из условий задачи следует, что впервые у подножия горы они встретились через 130 минут. Значит впервые на вершине горы они встретятся через 130 + x минут. В таком случае x – это такое минимальное натуральное число, что

($5+x$) - делитель ($130+x$) и ($10+x$) - делитель ($130+x$).

Перебором устанавливаем, что $x = 20$.

Ответ: 20.

2. Решите уравнение $\left(x^2+3x-16\right)\left(x^2+7x-6\right)=41$.

Решение: Перемножаемые трехчлены имеют одинаковые дискриминанты. Значит модуль разности корней первого трехчлена равен модулю разности корней второго. Это позволяет с успехом применить определенную "центрирующую" замену:

$\left((x+1,5)^2-18,25\right)\left((x+3,5)^2-18,25\right)=41$. Замена $x=y-2,5$. Тогда

$$\left((y-1)^2-18,25\right)\left((y+1)^2-18,25\right)=41 \Leftrightarrow \left(\left(y^2-17,25\right)-2y\right)\left(\left(y^2-17,25\right)+2y\right)=41 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2-17,25\right)^2-4y^2=41.$$

Получившееся биквадратное уравнение решается затем стандартным образом.

Ответ: $\dfrac{-5\pm\sqrt{77+4\sqrt{114}}}{2}$, $\dfrac{-5\pm\sqrt{77-4\sqrt{114}}}{2}$.

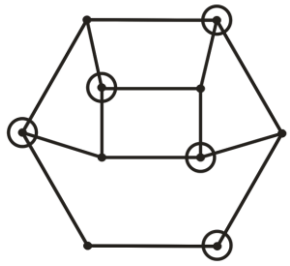
3. Найдите натуральное число n, ближайшее к 1022, сумма всех делителей которого (включая 1 и само это число) равна $2n$-1.

Решение: Сумма делителей числа $n=2^k$ равна $1+2+2^2+\ldots+2^k=2^{k+1}-1=2n-1$. Ближайшее число вида $n=2^k$ к 1022 это 1024. Остаётся проверить, что для 1023 соответствующее равенство не выполняется.

Ответ: 1024.

4. В пунктах А и В находится по автомобилю. Каждую минуту эти два автомобиля *одновременно* переезжают в какой-либо соседний пункт (пункты, соединённые отрезками, называют соседними). Докажите, что автомобили никогда не окажутся одновременно в одном пункте.

Решение: Выделим некоторые вершины графа, обведя их в кружочек. Изначально, один из автомобилей находится в выделенной вершине, а второй нет. Из выделенной вершины можно попасть только в невыделенную и наоборот (двудольный граф). Поэтому в одной вершине автомобили оказаться не могут.



5. Найдите наименьшее отличное от полного квадрата натуральное число N такое, что десятичная запись числа $\sqrt{N}$ имеет вид: $A{,}00a_1a_2\ldots a_n\ldots$, где A – целая часть числа $\sqrt{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – цифры от 0 до 9.

Решение: По условию существует натуральное n такое, что $n^2 < N < (n+1)^2$. Следовательно, существует натуральное a такое, что $N = n^2 + a,\ a \in (0; 2n+1)$. Далее, $n^2 < n^2 + a < (n+1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+a} < \sqrt{(n+1)^2} \Leftrightarrow 0 < \sqrt{n^2+a} - n < 1.$ Следовательно, дробная часть числа $\sqrt{N}$ равна $\sqrt{n^2+a} - n$. *<u>Остается найти минимальное натуральное n, для которого существует натуральное</u>* $a \in (0; 2n+1)$ *<u>такое, что</u>*

$$\sqrt{n^2+a} - n < \frac{1}{100}.$$

Отсюда $\sqrt{n^2+a} < \frac{1}{100} + n \Leftrightarrow a < \frac{1}{10^4} + \frac{n}{50}$. Минимальное n равно, очевидно, 50, и тогда $a = 1$. Следовательно, $N = n^2 + a = 2501$.

Ответ: 2501.

6. Запишем подряд все натуральные числа, кратные девяти:

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, …

У каждого из этих чисел подсчитаем сумму цифр. В результате, получим последовательность:

9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 18, 9, …

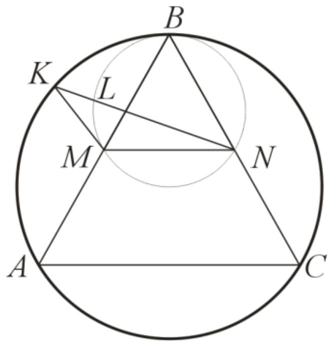
Найдите сумму первых 400 членов этой последовательности.

Решение: У натуральных чисел, кратных девяти, от 9 до 3600 надо подсчитать суммы цифр, а затем эти суммы сложить. Пусть c_9 – количество чисел в этом диапазоне, у которых сумма цифр равна 9, c_{18} – количество чисел с суммой цифр 18, c_{27} – количество чисел с суммой цифр 27.

Вычислим c_9. Будем все числа трактовать как четырехзначные: 9=0009, 18=0018, … Рассмотрим сначала числа вида $0m_1m_2m_3$, т.е. те, у которых первая цифра ноль. Выясним сколькими способами число 9 может быть представлено в виде суммы трех целых неотрицательных слагаемых: $9 = m_1 + m_2 + m_3$. Прибавим к обеим частям число 3: $12 = (m_1+1)+(m_2+1)+(m_3+1)$. Получается, что надо найти количество способов представить число 12 в виде суммы трех *натуральных* слагаемых. Это количество равно C_{11}^2. (Действительно, представим себе на числовой прямой числа 1,2,…,12. Между ними имеется 11 промежутков. Выбрав два промежутка, мы разобьем 12 на три ненулевых слагаемых.) Аналогично, имеется C_{10}^2 чисел с суммой цифр 9 вида $1m_1m_2m_3$, C_9^2 чисел $2m_1m_2m_3$ и, наконец, C_8^2 чисел $3m_1m_2m_3$. (Заметим, что при подсчете количества чисел вида $3m_1m_2m_3$ выполняется равенство $6 = m_1 + m_2 + m_3$, поэтому рассматриваемые числа $3m_1m_2m_3$ будут автоматически не больше, чем 3600.) В итоге, $c_9 = C_{11}^2 + C_{10}^2 + C_9^2 + C_8^2 = 164$.

Затем непосредственным подсчетом находим $c_{27} = 10$, и, следовательно, $c_{18} = 226$. Для получения ответа остается вычислить $9c_9 + 18c_{18} + 27c_{27}$.

Ответ: 5814.



7. В окружность вписан равносторонний треугольник *ABC*, *M* – середина стороны *AB*, *N* – середина стороны *BC*. Докажите, что для любой точки *K*, лежащей на окружности, величина угла *MKN* не превосходит 60^0.

Решение: Опишем окружность вокруг треугольника *BMN*. Она касается внутренним образом в точке *B* описанной около треугольника *ABC* окружности, поскольку точка *B* и центры окружностей лежат на одной прямой. Пусть сначала точка *K* лежит выше горизонтальной прямой *MN*. Пусть *L* – точка пересечения отрезка *KN* и меньшей окружности. Угол *MLN* равен 60^0, и, следовательно, угол *KLM* равен 120^0. Значит, угол *MKN* не превосходит 60^0. Заметим, что в приведенном рассуждении не играет никакой роли то обстоятельство, что точка *K* лежит на окружности. Важно лишь, что она находится выше прямой *MN* и вне окружности, описанной около треугольника *BMN*.

Пусть теперь точка *K* расположена ниже прямой *MN* (этот случай на рисунке не отражен). Рассмотрим точку K_1, симметричную точке *K* относительно прямой *MN*. Углы MK_1N и *MKN*, очевидно, равны. Точка K_1 лежит выше прямой *MN* и вне меньшей окружности. По доказанному, угол MK_1N не превосходит 60^0. Утверждение доказано полностью.

8. Найдите три каких-нибудь натуральных числа *a*, *b*, *c*, удовлетворяющих равенству $a^3 + b^{2016} = c^5$.

Решение: Известно, что $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Поэтому числа a, b, c будем искать в виде $a = 2^k$, $b = 2^l$, $c = 2^m$. Остается подобрать целые неотрицательные показатели k, l, m так, чтобы выполнялись соотношения $3k = 2016l = 5m - 1$.

Ответ: Например, $a = 2^{2688}$, $b = 2^4$, $c = 2^{1613}$.