

Решения

1. На тележку массой M , движущуюся горизонтально со скоростью v_1 , упал сверху груз, после чего скорость тележки с грузом стала равна v_2 . Найти массу груза m .

Решение:

Из закона сохранения импульса следует

$$Mv_1 = (M + m)v_2,$$

откуда

$$m = \frac{v_1 - v_2}{v_2} M.$$

Ответ:

$$m = \frac{v_1 - v_2}{v_2} M.$$

2. При повышении температуры идеального одноатомного газа на $\Delta T_1 = 150^\circ\text{K}$ среднеквадратичная скорость его молекул возросла от $v_1 = 400$ м/с до $v_2 = 500$ м/с. На какую величину ΔT_2 нужно дополнительно повысить температуру этого газа, чтобы увеличить среднеквадратичную скорость его молекул от $v_2 = 500$ м/с до $v_3 = 600$ м/с?

Решение:

Среднеквадратичная скорость молекул идеального одноатомного газа при температуре T равна

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

где k – постоянная Больцмана, m_0 – масса молекулы.

Из записанного следует, что при первом повышении температуры

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{3k}{m_0} (T_2 - T_1) = \frac{3k}{m_0} \Delta T_1.$$

При втором повышении температуры

$$v_3^2 - v_2^2 = \frac{3k}{m_0} (T_3 - T_2) = \frac{3k}{m_0} \Delta T_2.$$

После деления второго уравнения на первое

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{v_3^2 - v_2^2}{v_2^2 - v_1^2}$$

откуда

$$\Delta T_2 = \Delta T_1 \frac{v_3^2 - v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx 183,3^\circ\text{K}.$$

Ответ:

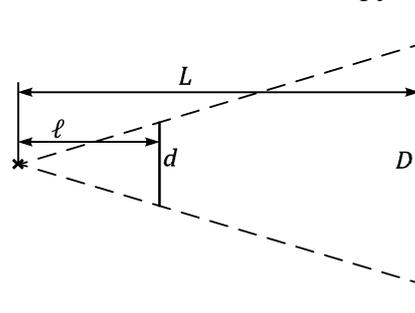
$$\Delta T_2 = \Delta T_1 \frac{v_3^2 - v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx 183,3^\circ\text{K}.$$

3. Непрозрачный круг освещается точечным источником света и отбрасывает круглую тень на экран. Найти диаметр тени, если диаметр круга $0,1$ м. Расстояние от источника света до круга в 3 раза меньше, чем расстояние от источника до экрана.

Решение:

Поскольку источник отбрасывает на экран круглую тень, он расположен на оси симметрии непрозрачного круга. Из подобия треугольников (см. рисунок)

$$\frac{\ell}{L} = \frac{d}{D'}$$



где d, D – диаметры круга и тени, ℓ, L – расстояния от источника до круга и до экрана. Отсюда

$$D = \frac{L}{\ell} d = 3d = 0,3 \text{ м.}$$

Ответ:

$$D = \frac{L}{\ell} d = 0,3 \text{ м.}$$

4. Два точечных одноименных заряда воздействуют друг на друга с некоторой силой. Как нужно изменить расстояние между зарядами, чтобы после заполнения пространства вокруг них материалом с относительной диэлектрической проницаемостью ε сила взаимодействия осталась той же?

Решение:

Согласно закону Кулона,

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_1^2},$$

где q_1, q_2 – исходные заряды, r_1 – расстояние между ними.

После заполнения пространства диэлектриком сила взаимодействия

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_2^2}.$$

Приравнивая силы, можно найти

$$\varepsilon r_2^2 = r_1^2,$$

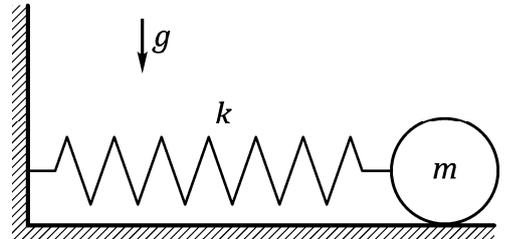
откуда

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\varepsilon}.$$

Ответ: уменьшить,

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\varepsilon}.$$

5. Шарик массой m на гладкой горизонтальной поверхности стола совершает гармонические колебания с амплитудой A вдоль прямой под действием упругой пружины жесткости k . Найти ускорение a (по модулю) шарика в те моменты времени, когда его скорость (по модулю) в n раз меньше своего максимального значения.



Решение:

Способ 1

Круговая частота колебаний шарика

$$\omega = \sqrt{k/m}.$$

Пусть шарик движется вдоль координатной оси Ox , координата x шарика в положении равновесия равна нулю. Зависимости от времени t параметров движения шарика следующие: координаты x

$$x = A \cos(\omega t + \alpha),$$

проекции на ось Ox скорости шарика

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha),$$

проекции на ось Ox ускорения шарика

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha),$$

где α – начальная фаза.

Моменты времени, в которые скорость по модулю в n раз меньше своего максимального значения, определяется условием:

$$V_x = \pm \frac{A\omega}{n} = -A \sin(\omega t + \alpha).$$

Решая совместно два последних уравнения, можно найти:

$$\frac{a_x^2}{A^2 \omega^4} + \frac{1}{n^2} = 1.$$

Отсюда модуль ускорения шарика в указанные моменты времени:

$$a = |a_x| = A\omega^2 \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{Ak}{m} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

Способ 2

Из закона сохранения энергии

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{mV_m^2}{2},$$

где V_m – максимальное значение скорости. Отсюда

$$V_m^2 = \frac{k}{m} A^2.$$

Скорость, которая по модулю в n раз меньше своего максимального значения,

$$V_x = \frac{V_m}{n} = \frac{A}{n} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

В эти моменты времени закон сохранения энергии:

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{mV_x^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Подставляя скорость в это уравнение, можно найти

$$x^2 = A^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad x = A \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

Сила, действующая со стороны сжатой пружины,

$$F = kx = kA \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}},$$

откуда ускорение

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Ak}{m} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

Ответ:

$$a = \frac{Ak}{m} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

6. Два тела бросили из одной точки на поверхности Земли в одной вертикальной плоскости со скоростями v_1 и v_2 под углами α и β к горизонту в одну сторону. Найти модуль относительной скорости тел.

Решение:

Проекции скоростей в прямоугольной системе координат с горизонтальной осью Ox и вертикальной осью Oy

$$\begin{aligned} v_{1x} &= v_1 \cos \alpha, \\ v_{1y} &= v_1 \sin \alpha - gt, \\ v_{2x} &= v_2 \cos \beta, \\ v_{2y} &= v_2 \sin \beta - gt. \end{aligned}$$

Относительная скорость

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2,$$

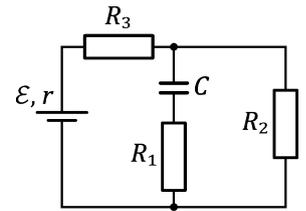
а ее модуль

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_1 \cos \alpha - v_2 \cos \beta)^2 + (v_1 \sin \alpha - v_2 \sin \beta)^2} = \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}. \end{aligned}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(v_1 \cos \alpha - v_2 \cos \beta)^2 + (v_1 \sin \alpha - v_2 \sin \beta)^2} = \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}. \end{aligned}$$

7. В схеме на рисунке электрический заряд Q на обкладках конденсатора емкостью $C = 1000$ мкФ равен 10 мКл. Внутреннее сопротивление источника $r = 10$ Ом, сопротивления $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом и $R_3 = 30$ Ом. Чему равна э.д.с.?



Решение:

Электрический ток через последовательно включенные R_1 и C не идет, поэтому разность потенциалов на конденсаторе и резисторе R_2 одинаковы:

$$U = IR_2,$$

а так как

$$U = \frac{Q}{C}$$

то

$$I = \frac{Q}{R_2 C}.$$

Закон Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + R_3 + r},$$

следовательно

$$\mathcal{E} = \frac{Q R_2 + R_3 + r}{R_2} = 30 \text{ В}.$$

Ответ:

$$\mathcal{E} = \frac{Q R_2 + R_3 + r}{R_2} = 30 \text{ В}.$$

8. Истребитель Су-35 имеет размах крыльев 15 м. Какая максимальная разность потенциалов возникает между концами крыльев при маневрировании самолета на скорости 1000 км/час, если индукция магнитного поля Земли в месте полета равна 55 мкТл? Крылья и корпус самолета считать металлическими.

Решение:

Крылья самолета можно рассматривать как металлический стержень длиной L , движущийся в магнитном поле с индукцией B .

На электрон в металле, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца

$$F = qvB \sin \alpha,$$

где q – заряд электрона, v – ее скорость, α – угол между силовыми линиями магнитного поля и вектором скорости. Эта сила стремится сместить электроны. При этом возникает электрическое поле напряженностью E , которое уравнивает силу Лоренца:

$$qE = qvB \sin \alpha.$$

Разность потенциалов равна произведению напряженности электрического поля и расстояния между точками:

$$U = EL = vBL \sin \alpha.$$

Максимальная разность потенциалов возникает, когда линии магнитного поля перпендикулярны вектору скорости, то есть при $\alpha = 90^\circ$:

$$U = vBL = 0,23 \text{ В.}$$

Этот результат можно получить другим образом: сила Лоренца является сторонней силой, порождающей э.д.с., которая по определению равна работе сторонней силы FL , деленной на заряд.

Ответ:

$$U = vBL = 0,23 \text{ В.}$$

Решения

1. С некоторой высоты h вертикально вниз без начальной скорости брошено тело. Средняя скорость тела на нижней половине пути равна v . Найти высоту h .

Решение:

В прямоугольной системе координат с горизонтальной осью Ox и вертикальной осью Oy

$$y = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Время достижения половины пути

$$t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Время падения

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

По определению средней скорости

$$v = \frac{h/2}{t_2 - t_1} = \frac{\sqrt{gh}}{2(\sqrt{2} - 1)}.$$

Отсюда

$$h = 4(\sqrt{2} - 1)^2 \frac{v^2}{g} = 4(3 - 2\sqrt{2}) \frac{v^2}{g}.$$

Ответ:

$$h = 4(\sqrt{2} - 1)^2 \frac{v^2}{g} = 4(3 - 2\sqrt{2}) \frac{v^2}{g}.$$

2. Два груза, массы которых m_1 и m_2 , связанные легкой горизонтально расположенной нитью, лежат на гладкой горизонтальной поверхности. К грузу массой m_1 приложили постоянную горизонтальную силу, и грузы стали двигаться. Сила натяжения нити в процессе движения равна T . Найти приложенную к грузу массой m_1 силу F .

Решение:

Уравнение движения (второй закон Ньютона) для груза массой m_1 :

$$m_1 a = F - T,$$

где a – ускорение.

Уравнение движения для груза массой m_2 :

$$m_2 a = T.$$

После сложения этих уравнений:

$$(m_1 + m_2)a = F.$$

Исключая из двух последних уравнений ускорение, можно найти:

$$F = (m_1 + m_2)a = \frac{m_1 + m_2}{m_2} T.$$

Ответ:

$$F = \frac{m_1 + m_2}{m_2} T.$$

3. Пуля массы 10 г, вылетевшая из винтовки со скоростью 800 м/с, упала на землю со скоростью 40 м/с. Какая работа против силы сопротивления воздуха совершена при движении пули? Силой тяжести пренебречь.

Решение:

Работа против сил сопротивления воздуха равна разнице кинетических энергий пули в начале и в конце пути:

$$A = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2) = 3108 \text{ Дж},$$

где m – масса пули, v_1, v_2 – скорости пули при вылете из винтовки и при падении на землю соответственно.

Ответ:

$$A = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2) = 3108 \text{ Дж}.$$

4. Медное кольцо радиусом 5 см помещают в однородное магнитное поле с индукцией 8 мТл перпендикулярно линиям индукции. Какой заряд пройдет по кольцу, если его повернуть на 180° вокруг оси, совпадающей с его диаметром? Сопротивление единицы длины кольца 2 мОм/м.

Решение:

Согласно закону Фарадея, определению потока вектора магнитной индукции, определению силы тока и закону Ома для замкнутой электрической цепи:

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad \Phi = BS \cos \alpha, \quad I = \frac{q}{\Delta t}, \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Если радиус кольца a , то сопротивление кольца

$$R = 2\pi a\rho,$$

где $\rho = 2 \text{ мОм/м}$ – сопротивление единицы длины кольца/

Из всех уравнений:

$$\mathcal{E} = \frac{BS(\cos 0 - \cos \pi)}{\Delta t} = 2 \frac{B\pi a^2}{\Delta t},$$

$$\frac{q}{\Delta t} = \frac{2B\pi a^2}{2\pi a\rho\Delta t} \Rightarrow q = \frac{Ba}{\rho} = 200 \text{ мКл}.$$

Ответ:

$$q = \frac{Ba}{\rho} = 200 \text{ мКл}.$$

5. Два маленьких шарика связаны невесомой нерастяжимой пружиной. Если каждому шарiku сообщить одинаковый заряд q_1 , то длина пружины будет равна ℓ_1 , а если сообщить q_2 , то длина пружины равна ℓ_2 . Найти коэффициент жесткости пружины k .

Решение:

Условие равновесия:

$$F_{\text{упр}} = F_{\text{кл}}.$$

Отсюда уравнения для двух вариантов заряда:

$$k(\ell_1 - \ell_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1^2}{\ell_1^2},$$

$$k(\ell_2 - \ell_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2^2}{\ell_2^2},$$

где ℓ_0 – длина недеформированной пружины.

Вычитая из второго уравнения первое, легко найти:

$$k(\ell_2 - \ell_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_2^2}{\ell_2^2} - \frac{q_1^2}{\ell_1^2} \right],$$

откуда

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0(\ell_2 - \ell_1)} \left[\frac{q_2^2}{\ell_2^2} - \frac{q_1^2}{\ell_1^2} \right].$$

Ответ:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0(\ell_2 - \ell_1)} \left[\frac{q_2^2}{\ell_2^2} - \frac{q_1^2}{\ell_1^2} \right].$$

6. В шинах автомобиля температура воздуха $t_1 = 14^\circ\text{C}$, а его давление $p_1 = 500$ кПа. Во сколько раз уменьшится площадь соприкосновения колес с дорогой, если после поездки температура в шинах повысится до $t_2 = 57^\circ\text{C}$? Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа. Изменением объема шины пренебречь.

Решение:

Пусть давление в нагретых шинах равно p_2 . Согласно закону Шарля

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1},$$

где $T_1 = t_1 + 273^\circ\text{C}$ и $T_2 = t_2 + 273^\circ\text{C}$ – абсолютные температуры, соответствующие t_1 и t_2 .

Сила давления шин на дорогу в обоих случаях одна и та же – она равна весу автомобиля. Учитывая, что в формулу для силы давления входит избыточное давление, то есть разность между давлением в шинах и атмосферным давлением,

$$(p_1 - p_0)S_1 = (p_2 - p_0)S_2.$$

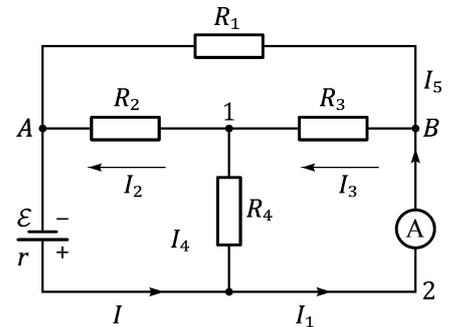
Из написанных уравнений следует

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{p_1 T_2 - p_0 T_1}{T_1 (p_1 - p_0)} = 1,2.$$

Ответ:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{p_1 T_2 - p_0 T_1}{T_1 (p_1 - p_0)} = 1,2.$$

7. Определить, как изменится и чему будет равен ток через амперметр в схеме, приведенной на рисунке, если внутреннее сопротивление источника $r = 10$ Ом увеличить в 5 раз, а э.д.с. $\mathcal{E} = 180$ В увеличить в 3 раза. Внутреннее сопротивление амперметра равно нулю. Сопротивления $R_1 = R_3 = 30$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_4 = 15$ Ом.



Решение:

Так как сопротивлением амперметра можно пренебречь, то R_3 и R_4 соединены параллельно, их общее сопротивление

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Последовательно с R_{34} подключено R_2 , общее сопротивление

$$R_{234} = R_2 + R_{34} = R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 15 \text{ Ом}.$$

Полное сопротивление цепи R представляется как параллельное соединение сопротивлений R_{234} и R_1 :

$$R = \frac{R_1 \left(R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right)}{R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} = 10 \text{ Ом}.$$

Полный ток в цепи при исходных параметрах источника

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R} = 9 \text{ А}.$$

Согласно первому правилу Кирхгофа для узла B ток

$$I_1 = I_5 + I_3.$$

Разность потенциалов между точками 2 и A находится по закону Ома для однородного участка цепи:

$$\varphi_2 - \varphi_A = IR = \frac{\mathcal{E}}{r + R} R = 90 \text{ В.}$$

Потенциал точек 2 и B одинаков. Тогда, используя закон Ома для однородного участка цепи на сопротивлении R_1 и R_{234} , легко найти

$$I_5 = \frac{\varphi_2 - \varphi_A}{R_1} = \frac{\mathcal{E}}{r + R} \frac{R}{R_1} = 3 \text{ А,}$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_A}{R_{234}} = \frac{\mathcal{E}}{r + R} \frac{R}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} = 6 \text{ А.}$$

Ток I_2 в точке 1 делится на токи I_3 и I_4 .

Разность потенциалов между точками 1 и A

$$\varphi_1 - \varphi_A = I_2 R_2 = \frac{\mathcal{E}}{r + R} \frac{R R_2}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} = 30 \text{ В.}$$

Разность потенциалов между точками B и 1:

$$\varphi_B - \varphi_1 = IR - I_2 R_2 = \frac{\mathcal{E} R}{r + R} \left(1 - \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \right) = 60 \text{ В.}$$

С учетом этого токи

$$I_3 = \frac{\varphi_B - \varphi_1}{R_3} = \frac{\mathcal{E}}{r + R} \frac{R}{R_3} \left(1 - \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \right) = 2 \text{ А,}$$

$$I_4 = \frac{\varphi_B - \varphi_1}{R_4} = \frac{\mathcal{E}}{r + R} \frac{R}{R_4} \left(1 - \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \right) = 4 \text{ А.}$$

Ток I_4 минует амперметр, поэтому

$$I_1 = I - I_4 = I_5 + I_3,$$

откуда

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + R} \left[1 - \frac{R}{R_4} \left(1 - \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \right) \right] = 5 \text{ А}$$

или

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} R}{r + R} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \left(1 - \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \right) \right] = 5 \text{ А.}$$

После подстановки исходных данных видно, что при изменении параметров источника э.д.с. ток не изменится.

Ответ: Ток не меняется,

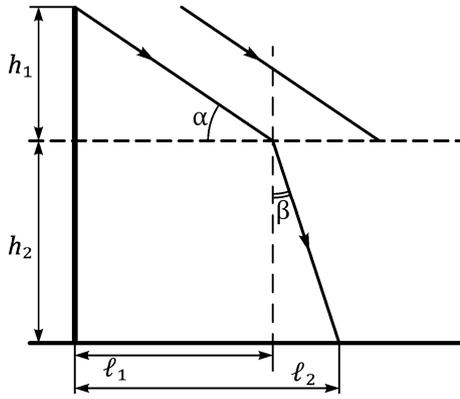
$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + R} \left[1 - \frac{R}{R_4} \left(1 - \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \right) \right] = 5 \text{ А.}$$

8. Свая вбита в дно реки и возвышается над водой на $h_1 = 1$ м. Глубина реки $h_2 = 2$ м. Найти длину тени сваи на поверхности воды и на дне реки, когда солнечные лучи падают под углом к горизонту $\alpha = 30^\circ$. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

Решение:

Длина тени на поверхности воды определяется геометрически:

$$\ell_1 = \frac{h_1}{\text{tg } \alpha} = h_1 \sqrt{3} \approx 1,7 \text{ м.}$$



Длина тени на дне реки складывается из длины тени на поверхности воды и расстояния, на которое пройдет луч вдоль дна после попадания в воду:

$$l_2 = l_1 + h_2 \operatorname{tg} \beta,$$

где β – угол между лучом света в воде и нормалью к поверхности воды.

При прохождении границы воздух-вода луч преломляется. Закон преломления:

$$\frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin \beta} = n,$$

отсюда

$$\sin \beta = \frac{\cos \alpha}{n} = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad \operatorname{tg} \beta \approx 0,854, \quad l_2 \approx 3,4 \text{ м.}$$

Ответ:

$$l_1 = \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} \approx 1,7 \text{ м}, \quad l_2 = l_1 + h_2 \operatorname{tg} \beta \approx 3,4 \text{ м.}$$