Вариант 1.1

РЕШЕНИЯ

1. Решение.

Обозначим $a = \sqrt{log_2 5}$. Тогда $log_2 10 = a^2 + 1$.

$$4log_2 10 - 12\sqrt{log_2 5} + 5 = 4(a^2+1) - 12a + 5 = 4a^2 - 12a + 9 = (2a-3)^2.$$

$$4log_2 10 - 4\sqrt{log_2 5} - 3 = 4(a^2+1) - 4a - 3 = (2a-1)^2.$$

Следовательно,

$$\sqrt{4log_2 10 - 12\sqrt{log_2 5} + 5} - \sqrt{4log_2 10 - 4\sqrt{log_2 5} - 3} = |2a-3| - |2a-1|.$$

Сравним числа $\sqrt{log_2 5}$ и $\frac{3}{2}\cdot$ Это равносильно сравнению $log_2 5$ и $\frac{9}{4}\cdot$ Потенцируя и переходя к целым степеням, убеждаемся, что первое число больше. Тогда

$$\sqrt{4log_2 10 - 12\sqrt{log_2 5} + 5} - \sqrt{4log_2 10 - 4\sqrt{log_2 5} - 3} = (2a-3) - (2a-1).$$

Ответ:-2.

2. Решение.

Пусть x – производительность 1-й трубы, y – 2-й. Используя условие задачи, составим систему уравнений $50x + 10y = 45(x+y)$.

Отсюда найдем $\frac{x}{y} = 7$.

Ответ: 7.

3. Решение.

Обозначим $t = |x+2|$. Тогда исходное неравенство примет вид

$$\sqrt{7-t} \le \sqrt{t^2-5}.$$

Последнее равносильно системе

$$\begin{cases} 7 - t \le t^2 - 5, \\ 7 - t \ge 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему неравенств и производя обратную замену, получим

$$x \in [-9; -5] \cup [1; 5].$$

Ответ: $x \in [-9; -5] \cup [1; 5]$.

4. Решение.

Используя формулу для суммы бесконечно убывающей прогрессии, из условия задачи получим уравнения

$$\frac{b_1}{1-q} = 4, \frac{b_1^3}{1-q^3} = \frac{64}{7}\cdot$$

Решая полученную систему уравнений и учитывая, что прогрессия бесконечно убывающая, найдем $b_1 = 2$.

Ответ: 2.

5. Решение.

Используя тождество $sin2x = (sinx + cosx)^2 - 1$ и заменяя $t = sinx + cosx$, получим уравнение

$$t^2 - 1 - 3t + 3 = 0.$$

Отсюда найдём $t = 1$ или $t = 2$. $sinx + cosx = 2$, очевидно, решений не имеет. Решением уравнения $sinx + cosx = 1$ будут серии $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

6. Решение.

Найдем О.Д.З.: $x > 0, x \neq 1$.

На О.Д.З. исходное неравенство равносильно неравенству

$$log_x(x+1) + 2log_{x+1}x \leq 0.$$

Используя тождество

$$log_{x+1}x = \frac{1}{log_x(x+1)}$$

приходим к неравенству

$$log_x(x+1) < 0.$$

Решением последнего является интервал (0; 1).

Ответ: $x \in (0; 1)$.

7. Решение.

Обозначим α –угол ABC. Используя формулу площади треугольника

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\alpha,$$

найдем $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}\cdot$ Тогда $(\cos\alpha)^2 = \frac{1}{16}\cdot$Так как медиана BD меньше половины стороны AC, то $cos\alpha < 0$. Следовательно, $\cos\alpha = -\frac{1}{4}\cdot$ По теореме косинусов находим $AC = 4$. По формуле AC для радиуса описанной около треугольника окружности

$$2R = \frac{AC}{\sin\alpha},$$

находим $R = \frac{8}{\sqrt{15}}\cdot$

Ответ: $R = \frac{8}{\sqrt{15}}\cdot$

8. Решение.

При $a < 0$ исходное уравнение не имеет решений. Следовательно, такие a не подходят.

При $a = 0$ уравнение имеет два решения $x = 0$ и $x = 1$.

При $a > 0$ уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} (x-1)(x-a)=a, \\ (x-1)(x-a)=-a. \end{cases}$$

Первое имеет два различных решения $x=0$ и $x=1+a$. Тогда для выполнения условия задачи второе не должно иметь решений. Следовательно, его дискриминант меньше 0. Решая соответствующее неравенство, получим $a \in \left(3-2\sqrt{2}; 3+2\sqrt{2}\right)$.

Ответ: $a \in \left(3-2\sqrt{2}; 3+2\sqrt{2}\right), a=0$.

Вариант 1.1

ОТВЕТЫ

1. -2.
2. 7.
3. $x \in [-9; -5] \cup [1; 5]$.
4. 2.
5. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
6. $x \in (0; 1)$.
7. $R = \frac{8}{\sqrt{15}}$.
8. $a \in \left(3-2\sqrt{2}; 3+2\sqrt{2}\right), a=0$.