Вариант 1.1

1. Выразите $\log_{140} 350$ через a и b, где $a = \log_7 5$ и $b = \log_5 2$.

Решение

Перейдем к основанию 5:

$$\log_{140} 350 = \frac{\log_5 350}{\log_5 140} = \frac{\log_5 2 + \log_5 5^2 + \log_5 7}{\log_5 2^2 + \log_5 5 + \log_5 7} =$$

$$= \frac{\log_5 2 + 2 + \log_5 7}{2\log_5 2 + 1 + \log_5 7} = \frac{b + 2 + \frac{1}{a}}{2b + 1 + \frac{1}{a}} = \frac{ab + 2a + 1}{2ab + a + 1}.$$

Ответ: $\frac{ab+2a+1}{2ab+a+1}$.

2. Решите уравнение:

$$5\sin x + |\sin x| = \cos x.$$

Решение

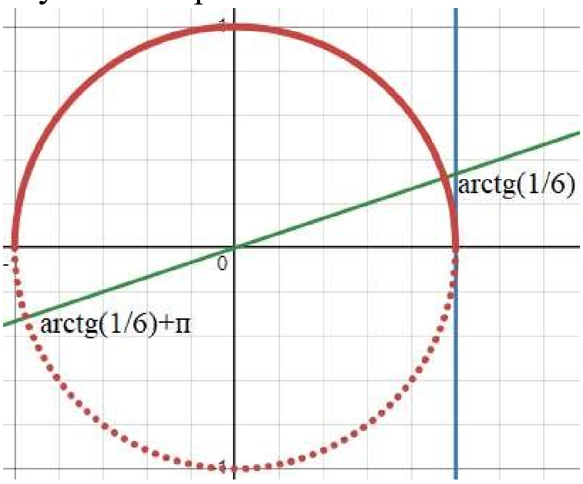
Рассмотрим случаи.

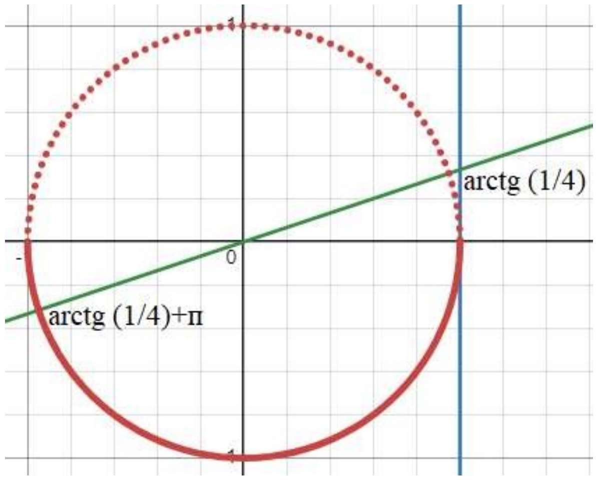
1) Пусть $\sin x \geq 0$. Тогда

$$6\sin x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$$x = \operatorname{arctg}\frac{1}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

С учетом ограничений





$$x = \operatorname{arctg}\frac{1}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2) Пусть $\sin x < 0$, тогда

$$4\sin x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

С учетом ограничений

$$x = \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{6}+2\pi n,\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+2\pi k,\ n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}.$

3. Решите неравенство
$$4^{\sqrt{x^2-1}-0,5}-2,5\cdot 2^{\sqrt{x^2-1}}\geq -2.$$

Решение

Сделаем замену переменной $t=2^{\sqrt{x^2-16}},\ t>0$, тогда
$$\frac{t^2}{2}-\frac{5}{2}t+2\geq 0\Leftrightarrow t^2-5t+4\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\geq 4\\ t\leq 1\end{array}\right..$$
Отсюда
$$\left[\begin{array}{l} 2^{\sqrt{x^2-16}}\geq 4,\\ 2^{\sqrt{x^2-16}}\leq 1,\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-16}\geq 2,\\ \sqrt{x^2-16}\leq 0,\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-16\geq 4,\\ \sqrt{x^2-16}\leq 0,\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2\geq 20,\\ x^2-16=0,\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|\geq 2\sqrt{5},\\ x=\pm 4,\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 2\sqrt{5},\\ x\leq -2\sqrt{5},\\ x=\pm 4,\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-2\sqrt{5}\right]\cup\{-4;4\}\cup[2\sqrt{5};+\infty).$$

Ответ: $\left(-\infty;-2\sqrt{5}\right]\cup\{-4;4\}\cup[2\sqrt{5};+\infty)$.

4. Числа a_1,a_2,a_3 – последовательные члены геометрической прогрессии, их сумма равна 7. Числа a_1,a_2+2,a_3-8 тоже являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите числа a_1,a_2,a_3.

Решение

Пусть $a_2=a_1q,\ a_3=a_1q^2$, тогда
$$a_1+a_1q+a_1q^2=a_1(1+q+q^2)=7.$$
По условию числа $a_1,\ a_1q+2,\ a_1q^2-8$ являются последовательными членами геометрической прогрессии, это возможно тогда и только тогда, когда
$$(a_1q+2)^2=a_1(a_1q^2-8)\Leftrightarrow a_1(q+2)=-1.$$
Решим систему уравнений:
$$\begin{cases} a_1(1+q+q^2)=7,\\ a_1(q+2)=-1,\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1(1+q+q^2)}{a_1(q+2)}=-7,\\ a_1(q+2)=-1,\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+q+q^2}{q+2}=-7,\\ a_1(q+2)=-1,\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} q=-5,\\ q=-3,\end{array}\right.\\ a_1(q+2)=-1,\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q=-5,\\ a_1=\dfrac{1}{3},\end{cases}\\ \begin{cases} q=-3,\\ a_1=1.\end{cases}\end{array}\right.$$
В первом случае имеем: $a_1=1,\ a_2=-3,\ a_3=9$, а во втором $a_1=\frac{1}{3},\ a_2=-\frac{5}{3},\ a_3=\frac{25}{3}$.

Ответ: $1;-3;9$ или $\frac{1}{3};-\frac{5}{3};\frac{25}{3}$.

5. Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объема) за 11 ч. Если бы 3 насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 ч. За сколько часов 3 насоса могут наполнить второй танкер?

Решение

Пусть объемы первого и второго танкера равны соответственно V_1 и V_2, а производительность одного насоса p. По условию

$$\frac{V_1}{4p}+\frac{V_2}{3\cdot 4p}=11.$$

$$\frac{V_1}{3p}+\frac{V_2}{4\cdot p}=18.$$

Обозначим $x=\frac{V_1}{p}, y=\frac{V_2}{p}$. Получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{12}=11,\\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=18,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=36,\\ y=24.\end{cases}$$

Время, необходимое для наполнения тремя насосами второго танкера есть

$$\frac{V_2}{3p}=\frac{y}{3}=8\text{ ч.}$$

Ответ: 8 ч.

6. Решите уравнение:

$$\log_{125}(\sin 2x-\sin x)+\frac{1}{3}=\log_5(-2\sin x).$$

Решение

$$\log_{125}(\sin 2x-\sin x)+\frac{1}{3}=\log_5(-2\sin x)\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}\log_5(\sin 2x-\sin x)+\frac{1}{3}=\log_5(-2\sin x)$$

$$\Leftrightarrow\log_5(\sin 2x-\sin x)+1=3\log_5(-2\sin x)$$

$$\Leftrightarrow\log_5 5(\sin 2x-\sin x)=\log_5(-8\sin^3 x)$$

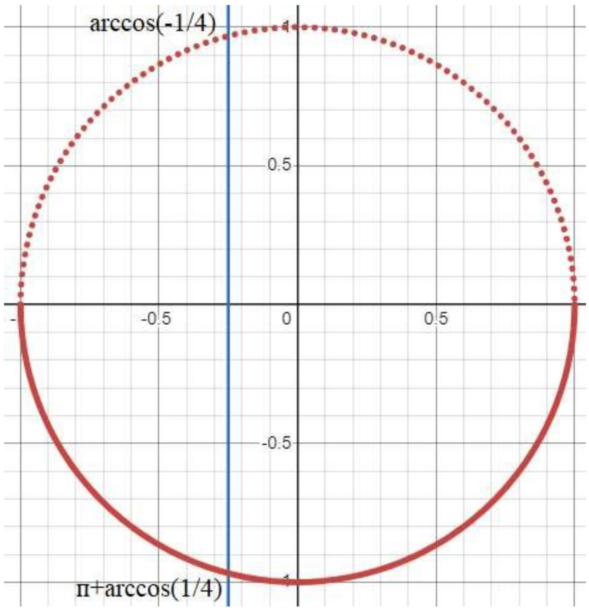
$$\Leftrightarrow\begin{cases}5(\sin 2x-\sin x)=-8\sin^3 x,\\ \sin x<0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\sin x\,(2\cos x-1)=-8\sin^3 x,\\ \sin x<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5(2\cos x-1)=-8\sin^2 x,\\ \sin x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5(2\cos x-1)=-8(1-\cos^2 x),\\ \sin x<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8\cos^2 x-10\cos x-3=0,\\ \sin x<0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=-\dfrac{1}{4},\\ \sin x<0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)+2\pi n, n\in\mathbb{Z},\\ \sin x<0.\end{cases}$$

С учетом ограничений $\sin x<0$

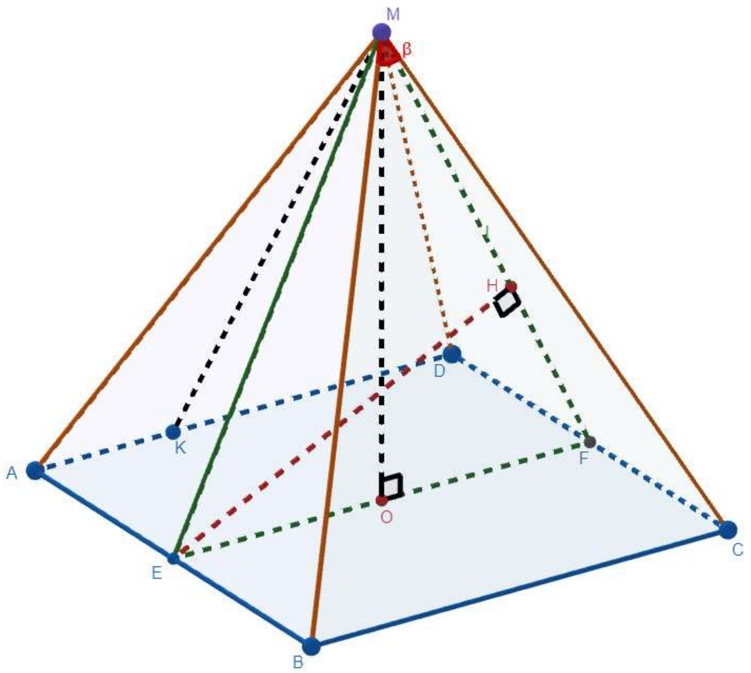


$$x = \pi + \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi + \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

7. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ плоские углы при вершине M равны $60°$. Точка K лежит на стороне основания AD и делит ее в отношении 1:3, считая от точки A. Найдите угол между прямой KM и плоскостью DMC.

Решение



Найдем синус угла φ между прямой KM и плоскостью $\alpha = (MDC)$, используя формулу

$$\sin\varphi = \frac{\rho(K,\alpha)}{KM},$$

где $\rho(K,\alpha)$ – расстояние от точки K до плоскости (MDC).

Пусть $AB = 4x$, тогда

$$AK = x, KD = 3x.$$

Плоский угол при вершине M равен $\beta = 60°$, поэтому все боковые грани – равносторонние треугольники со стороной $4x$. Проведем апофему ME и высоту пирамиды MO.

Треугольник MEF равнобедренный ($ME = MF$), $ME = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 2x\sqrt{3}$, $EF = 4x$. Высоту MO найдем по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике MEO:

$$MO=\sqrt{ME^2-EO^2}=\sqrt{12x^2-4x^2}=2\sqrt{2}x.$$

Проведем высоту EH в треугольнике MEF, используя формулу площади треугольника, найдем

$$EH=\frac{2S_{MEF}}{MF}=\frac{MO\cdot EF}{MF}=\frac{2\sqrt{2}x\cdot 4x}{2x\sqrt{3}}=4x\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{4x\sqrt{6}}{3}.$$

Теперь осталось заметить, что $EH\perp(MDC)$. В самом деле, $EH\perp MF$ по построению. С другой стороны, $EH\subset(MEF)$ и $DC\perp(MEF)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, поскольку $EF\perp DC, MF\perp DC$). Отсюда $EH\perp DC$. Итак, $EH\perp MF$ и $EH\perp DC$, а значит по тому же признаку $EH\perp(MDC)$. Поэтому $EH=\rho(E,\alpha)$. Вместе с тем, $A\in AB, E\in AB$ и $AB\parallel(MDC)$ (по признаку параллельности прямой и плоскости, поскольку $AB\parallel DC, DC\subset(MDC)$). Значит, $\rho(E,\alpha)=\rho(A,\alpha)=\frac{4x\sqrt{6}}{3}$.

Теперь заметим, что точки A, K лежат на одной наклонной AB к плоскости (MDC), отсюда, применяя подобие, несложно показать, что

$$\frac{\rho(A,\alpha)}{\rho(K,\alpha)}=\frac{AD}{KD}=\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}\Rightarrow\rho(K,\alpha)=\frac{3}{4}\rho(A,\alpha)=\frac{3}{4}\cdot\frac{4x\sqrt{6}}{3}=x\sqrt{6}.$$

Остается найти KM. Применим теорему косинусов к треугольнику AKM:

$$KM=\sqrt{AM^2+AK^2-2\cdot AM\cdot AK\cdot\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{16x^2+x^2-4x^2}=\sqrt{13}x.$$

Следовательно

$$\sin\varphi=\frac{\rho(K,\alpha)}{KM}=\frac{x\sqrt{6}}{\sqrt{13}x}=\sqrt{\frac{6}{13}}=\frac{\sqrt{78}}{13},$$

$$\varphi=\arcsin\frac{\sqrt{78}}{13}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{78}}{13}$.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}5\cdot 2^{|x|}+3|x|-2=5y+3x^2-5a,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение

Заметим, что если пара (x,y) является решением системы уравнений, то и пара $(-x,y)$ также является решением системы. Поэтому для единственности решения системы необходимо, чтобы $x=-x$, т.е. $x=0$. Подставив данное значение в систему, получим

$$\begin{cases} 5y - 5a = 3 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = \dfrac{2}{5}, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\dfrac{8}{5}, \\ y = -1, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{2}{5}, \\ a = -\dfrac{8}{5}. \end{array}\right.$$

Остается проверить «достаточность».

1) При $a = \frac{2}{5}$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 3|x| = 5y + 3x^2, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \cdot (2^{|x|} - y) = 3|x|(|x| - 1), & (1) \\ x^2 + y^2 = 1. & (2) \end{cases}$$

Из второго уравнения системы, очевидно, следует, что $|x| \leq 1$, поэтому $3|x|(|x| - 1) \leq 0$. Однако, вместе с тем и $|y| \leq 1$ и $2^{|x|} \geq 1$, значит,

$$5 \cdot (2^{|x|} - y) \geq 0.$$

Поэтому равенство (1) возможно только если $3|x|(|x| - 1) = 0$, отсюда $x = 0$ либо $x = \pm 1$. Если $x = \pm 1$, то из второго уравнения $y = 0$. Однако, это противоречит равенству (1). Если же $x = 0$, то из уравнения (1) $y = 1$, что очевидно удовлетворяет уравнению (2). Значит, $(0; 1)$ – единственное решение системы и $a = \frac{2}{5}$ удовлетворяет условию задачи.

2) При $a = -\frac{8}{5}$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 3|x| = 5y + 3x^2 + 10, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

Заметим, что пары $(0; -1), (1; 0)$ являются решениями системы. Значит, данная система имеет не единственное решение и $a = -\frac{8}{5}$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = \frac{2}{5}$.