РЕШЕНИЯ

1. Решение: заметим, что $6+2\sqrt{5}=\left(1+\sqrt{5}\right)^2, 4+2\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$. Тогда

$$\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\sqrt{15}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\sqrt{15}=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{2}+\sqrt{15}=4$$

Ответ: 4.

2. Решение: пусть x – скорость первой лодки, y – скорость второй, v – скорость течения реки Используя условие задачи, составим уравнение

$$(x-v)+3(y+v)=2(x+v)$$

Отсюда найдём $x=3y$.

Ответ: в 3 раза.

3. Решение: применим метод интервалов.

Нули числителя: $x_1=0,\ x_2=-6$.

Нули знаменателя: $x_3=-3, x_4=-2, x_5=-1, x_6=0$.

Расставляя знаки левой части неравенства на полученных промежутках (с учётом кратности корней), получим: $x\in(-\infty;-6]\cup(-3;-2)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty)$.

Ответ: $\boldsymbol{x\in(-\infty;-6]\cup(-3;-2)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty)}$.

4. Решение: обозначим: b – первый член, q – знаменатель прогрессии. Используя формулу для суммы бесконечно убывающей прогрессии, из первого условия задачи получим уравнение

$\frac{b}{1-q}=\frac{13b^3}{1-q^3}$.

Используя формулы сокращенного умножения, придём к равенству

$$1+q+q^2=13b^2.$$

Из второго условия задачи получим

$$b(1+q+q^2)=\frac{13}{27}.$$

Отсюда найдём $13b^3=\frac{13}{27}$.

Ответ: $\boldsymbol{b=\frac{1}{3}}$.

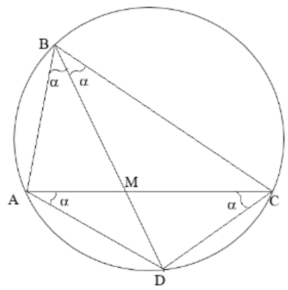
5. Решение: обозначим $t = cos2x$.
используя тригонометрические тождества, получим уравнение
$3\left(\frac{1+t}{2}\right)^2 + 2(1-t^2) = 3.$
Отсюда найдём $t = 1$ или $t = \frac{1}{5}$.
Тогда $cos2x = 1, x = \pi n,\ n\epsilon\mathbb{Z}$ или $cos2x = \frac{1}{5}, x = \pm\frac{1}{2}\arccos(\frac{1}{5}) + \pi n,\ n\epsilon\mathbb{Z}$
Ответ: $\boldsymbol{x = \pi n, x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{5}\right) + \pi n,\ n\epsilon\mathbb{Z}}$.

6. Решение: найдём О.Д.З.: $x\epsilon(0;4), x \neq 1, x \neq 3$.
Используя тождество $log_a b \cdot log_b c = log_a c$, получим неравенство

$$\log_x(2x^2) \leq \log_x(x^3).$$

На О.Д.З. это равносильно неравенству$\log_x 2 \leq 1$ Применяя метод линеаризации, получаем $(x-1)(2-x) \leq 0$.
Решая последнее неравенство и учитывая О.Д.З., получим $x\epsilon(0;1) \cup [2;3) \cup (3;4)$.
Ответ: $\boldsymbol{x\epsilon(0;1) \cup [2;3) \cup (3;4)}$.

7. Решение: для нахождения угла α (см. рис.) применим теорему синусов $\frac{AC}{sin2\alpha} = 2R$, где $R -$ радиус описанной около треугольника ABC окружности. Отсюда $sin2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$. Используя свойство равенства углов, опирающихся на одну дугу окружности, имеем $\angle CAD = \angle ACD = \alpha$. Находим $CD = \frac{AC}{2cos\alpha} = 1$. Для нахождения радиуса окружности, вписанной в треугольник ACD воспользуемся формулой $S = pr$, где $S -$ площадь треугольника, $p -$ полупериметр, $r -$ радиус вписанной окружности. Окончательно найдём $r = \frac{\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$.



Ответ: $\boldsymbol{r = \frac{\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{3}{2}}$.

8. Решение: прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2.
Используя логарифмические тождества, получим

$$(log_2 a + log_2(x^2+1))log_2(x^2+1) = log_2 a.$$

Заменим $log_2(x^2+1) = t, log_2 a = b$. Получим уравнение

$$t^2 + bt - b = 0\ (*)$$

Так как $x^2 = 2^t - 1$, то исходное уравнение имеет ровно два решения тогда и только тогда, когда уравнение (*) либо имеет ровно одно решение, и при этом это решение положительное, либо имеет два решения, и при этом одно из них отрицательное, а другое положительное. С учётом этого, получаем два случая:

1) $D = 0$. Тогда $b^2 + 4b = 0 \Leftrightarrow b = 0$ или $b = -4$.
При $b = 0$ получим $t = 0$ и, следовательно, $b = 0$ не подходит. При $b = -4$ получим $t = 2$ и, следовательно, $b = -4$ подходит. Найдём подходящее $a = 2^{-4}$.
2) Решения уравнения (*) удовлетворяют условию $t_1 < 0 < t_2$.
Последнее условие равносильно выполнению неравенства $f(0) < 0$,
где $f(t) = t^2 - bt - b$. Отсюда получим $b > 0 \Leftrightarrow a > 1$.
Ответ: $\boldsymbol{a \epsilon \left\{\frac{1}{16}\right\} \cup (1; +\infty)}$.